

# Computação Bio-Inspirada

---

Fabrcio Olivetti de Franca

01 de fevereiro de 2020



1. Algoritmos Evolutivos
2. Algoritmo Genético
3. Seleção dos pais
4. Cruzamento
5. Mutação
6. Modelos de GA
7. Substituição
8. Schema Theory

# Algoritmos Evolutivos

---

A heurística populacional que vimos na aula anterior é um *protótipo* de um Algoritmo Evolutivo

Os algoritmos evolutivos foram propostos por diferentes pesquisadores e tomam diferentes formas, mas com propriedades em comum:

- Trabalhamos com a ideia de *população* de soluções
- Utilizamos mecanismo de pressão ambiental que leva a seleção natural
- Medimos a qualidade de uma solução com uma função-objetivo de maximização
- Recombinamos conjuntos de soluções expandindo a nossa vizinhança local
- Variamos cada solução aleatoriamente

Isso cria duas forças fundamentais para essa classe de algoritmos:

- **Operadores de variação:** promovem diversidade e buscam por novas soluções (exploração).
- **Pressão seletiva:** promove a manutenção de soluções de boa qualidade (exploração).

- **Indivíduo:** uma solução representada por um *cromossomo*.
- **Cromossomo:** a representação computacional de uma solução (também chamada de **genótipo**).
- **Fenótipo:** a representação decodificada.
- **Fitness:** ou **função de aptidão**, uma função-objetivo de maximização que mede a qualidade de um indivíduo.
- **População:** um conjunto de indivíduos.
- **Cruzamento:** ou **recombinação**, uma função de alta-ordem que combina dois ou mais indivíduos.
- **Mutação:** uma função que altera um indivíduo aleatoriamente.

Um pseudo-algoritmo genérico para os algoritmos evolutivos pode ser descrito como

```
pop <- randomPopulation
fPop <- map fitness pop
until (termination pop) do
  parents <- repeat n_children (select pop fPop)
  children <- map recombine parents
  xmen <- map mutate children
  fChildren <- map fitness xmen
  pop <- repeat n_pop (replace pop<>xmen fPop<>fChildren)
```



A função `mutate` é uma função  $f : S \rightarrow S$  que altera uma solução aleatoriamente.

Geralmente essa função promove uma pequena alteração no cromossomo que pode refletir em uma mudança em diferentes graus no fitness do indivíduo.

A função *recombine* é uma função  $f : S \times S \times \dots S \rightarrow S \times S$  que recebe dois ou mais indivíduos como argumento e retorna um ou dois indivíduos denominados *filhos*.

# Algoritmo Genético

---

# Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético (*genetic algorithm* - GA) foi proposto por John Holland com o objetivo de estudar sistemas adaptativos.

Por muito tempo foi considerado como um método de otimização.

---

Representação	Strings binárias
Recombinação	cruzamento de 1 ponto
Mutação	Troca de bit
Seleção	Roleta
Substituição	Generacional

---

Vamos ilustrar o GA com um problema simples de otimização:  
 $\max x^2$  para  $x \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, 31]$ .

- Fitness: a própria função-objetivo.
- Codificação: podemos representar os valores de  $x$  como um número binário de 5 bits.

## Representação: genótipo x fenótipo

Dado um número binário  $[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  podemos decodificá-lo fazendo:

$$\text{decode } [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] = 16*b_1 + 8*b_2 + 4*b_3 + 2*b_4 +$$

e o fitness fica:

$$\text{fitness bits} = (\text{decode bits})^2$$

## Seleção dos pais

---



## Seleção proporcional ao fitness

A primeira ideia explorada é a de selecionar os pais proporcionalmente ao fitness, ou seja, dado o fitness  $f_i$  do indivíduo  $i$ , a probabilidade de ele ser selecionado como pai é:

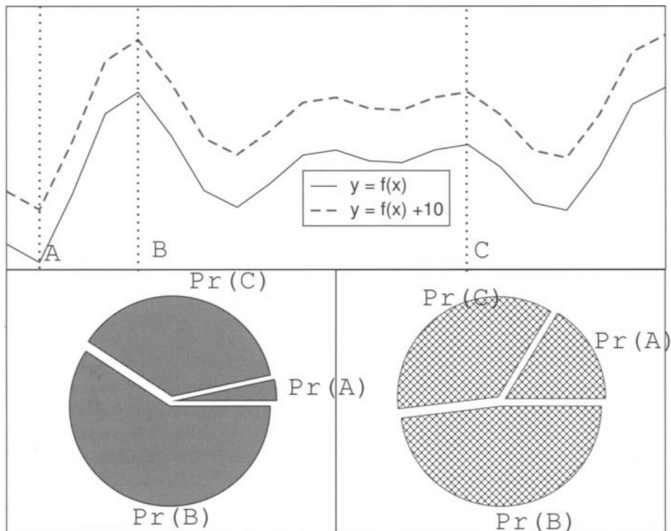
$$p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}$$

ou seja, a probabilidade depende do valor absoluto do fitness dos pais.

Esse tipo de seleção apresenta diversos problemas:

- Indivíduos com um fitness muito maior, acaba por dominar a seleção causando **convergência prematura**.
- Quando os valores de fitness são próximos entre si, não existe uma pressão seletiva e a escolha é praticamente uniforme.
- A probabilidade de escolha é sensível a pequenas variações do fitness

## Seleção proporcional ao fitness



**Fig. 3.19.** Example of the susceptibility of fitness proportionate selection to function transposition. *Top:* the fitness of three points for fitness functions  $f(x)$  and  $f' = f(x) + 10$ . *Bottom left:* selection probabilities of the three points under  $f(x)$ . *Bottom right:* selection probabilities of the three points under  $f'(x)$

Uma forma de resolver parte desses problemas é através de um processo de escalonamento, como o proposto por Goldberg e chamado de **sigma scaling**:

$$f'_i = \max(f_i - (\bar{f} - c\sigma_f), 0.0)$$

sendo  $\bar{f}, \sigma_f$  a média e desvio-padrão dos fitness e  $c$  uma constante de escalonamento, geralmente com valor 2.

Uma outra forma de reduzir o problema da seleção por fitness absoluto é utilizar o *rank* das soluções.

Por exemplo, se o fitness de um conjunto de soluções for:

[0.1, 19.3, 1.4, 0.05]

Ele seria mapeado para:

[2, 4, 3, 1]

Para calcular a probabilidade de escolha de cada indivíduo através do rank, podemos utilizar uma escala linear:

$$\text{rank}_{linear}(i) = \frac{2-s}{\mu} + \frac{2(i-1)(s-1)}{\mu(\mu-1)}$$

sendo  $i$  o valor do rank,  $1 < s < 2$  um fator de escala,  $\mu$  o maior rank observado.

Uma alternativa é o uso de uma escala exponencial:

$$\text{rank}_{\text{exp}}(i) = \frac{1 - e^{-i}}{\sum_j 1 - e^{-j}}$$

## Amostrando os pais

Idealmente teríamos uma quantidade de indivíduos proporcional a sua probabilidade, mas como geralmente o número de pais requisitados é menor do que o necessário, pegamos uma amostra. Para isso utilizamos um algoritmo de roleta aleatória.



A seleção por roleta simplesmente escolhe um valor aleatório e retorna o indivíduo naquela fatia da roleta:

$$P(x_i) = \frac{fitness(x_i)}{\sum_j fitness(x_j)}$$

```
spin fs = do
  r      <- random(0, 1)
  wheel <- cumsum(probability(fs))
  return (firstOf (>r) wheel)
```

Para a população: [10010, 00001, 01010, 10001] temos os valores de fitness [324, 1, 100, 289]

A probabilidade de cada um ser escolhido é [0.454, 0.001, 0.140, 0.405].

Calculamos a soma cumulativa desse vetor de probabilidades para saber as faixas de valores da roleta que cada indivíduo pertence:

[0.454, 0.455, 0.595, 1.000]

Agora sorteamos um número aleatório  $0 \leq r \leq 1$  e verificamos em qual faixa ele se encontra. O indivíduo dessa faixa é escolhido como um dos pais para a reprodução.

Para  $r = 0.3$  escolhemos o primeiro indivíduo.

Para  $r = 0.4541$  escolhemos o segundo indivíduo.

Digamos que ao seleccionar 4 casais temos:

$[(10001, 01010), (10010, 10001), (10001, 10010), (10001, 10010)]$

Apesar da ideia simples, o algoritmo de girar a roleta múltiplas vezes pode não gerar uma amostra representativa quando amostramos muitos indivíduos.

Uma outra forma é criar uma roleta com múltiplos ponteiros e girar uma única vez. Esse algoritmo é conhecido como **stochastic universal sampling** (SUS)

```
sus n fs = do
  r      <- random(0, 1/n)
  wheel  <- cumsum(probability(fs))
  choices <- for [1..n] (\i -> firstOf (>(r*i)) wheel)
  return choices
```

O SUS garante que o número de cópias de um indivíduo  $i$  seja pelo menos a parte inteira de  $n \cdot P(i)$ .



Uma outra forma de selecionar é através do **torneio** que simplesmente amostra  $k$  indivíduos da população e retorna o melhor deles.

Isso é um método de seleção local, pois precisa ter o conhecimento apenas da amostra dos  $k$  selecionados, ao contrário da roleta que requer a informação de fitness da população inteira.

Uma característica importante do torneio é que ele é invariante a translação e transposição, sendo um método mais robusto em relação a escolha da função de fitness.

A probabilidade que um indivíduo seja selecionado no torneio depende de:

- Seu rank dentro da população
- O tamanho do torneio  $k$  (quanto maior esse valor, maior o viés para indivíduos acima da média)
- Se os indivíduos são selecionados com ou sem substituição (sem substituição, os  $k-1$  piores indivíduos nunca serão selecionados)

```
tournament k pop = do
  -- trocar por sampleWithoutReplacement se desejado
  competitors <- sampleWithReplacement(k, pop)
  return (best competitors)
```

# Cruzamento

---

## Cruzamento de 1 Ponto

O cruzamento de um ponto simplesmente escolhe um ponto da string binária e reparte cada pai em duas metades. Após a divisão, as duas metades são intercambiadas entre si:

pais: (10001, 01010)

ponto: 3

filhos: (10010, 01001)

O cruzamento somente ocorre com uma probabilidade  $p_c$ , caso contrário os próprios pais são retornados.

## Cruzamento de 1 Ponto

```
onePoint pc (p1, p2) = do
  cx?  <- random(0, 1)
  if cx? <= pc
    then do
      point <- random(0, length p1 - 1)
      (p1a, p1b) <- splitAt point p1
      (p2a, p2b) <- splitAt point p2
      return (p1a<>p2b, p2a<>p1b)
    else return (p1,p2)
```

## Cruzamento de $n$ Pontos

O cruzamento de  $n$  pontos escolhe múltiplos pontos para repartir os genes. Para 2 pontos, temos:

pais: (10001, 01010)

pontos: 1, 3

filhos: (11001, 00010)



## Cruzamento de $n$ Pontos

```
onePoint pc n (p1, p2) = do
  cx?  <- random(0, 1)
  if cx? <= pc
    then do
      points <- sort (repeat n random(0, length p1 - 1))
    else
      points <- []
  forEach p1i, p2i, point in (p1, p2, points) do
    (p1a, p1b) <- splitAt point p1
    (p2a, p2b) <- splitAt point p2
    (p1, p2)   <- (p1a<>p2b, p2a<>p1b)
  return (p1, p2)
```

## Cruzamento Uniforme

O cruzamento uniforme percorre cada gene dos dois pais em paralelo e sorteia um valor entre 0 e 1, se ele for menor que um limiar (geralmente 0.5), ele coloca o gene do pai 1 no filho 1 e do pai 2 no filho 2, caso contrário ele inverte a ordem.

pais: (10001, 01010)

sorteios: [0.1, 0.3, 0.6, 0.1, 0.7]

filhos: (10000, 01011)

## Cruzamento Uniforme

```
uniformCX pc thr (p1, p2) = do
  cx?      <- random(0, 1)
  (c1, c2) <- ([], [])
  if cx? <= pc
    then do
      rs <- sample length(p1) random(0, 1)
      forEach p1i, p2i, r in (p1, p2, rs) do
        if (r <= thr)
          then do c1 <- insert p1i c1
                  c2 <- insert p2i c2
          else do c1 <- insert p2i c1
                  c2 <- insert p1i c2
      return (c1, c2)
    else return (p1, p2)
```

Podemos perceber pelos exemplos que o cruzamento de  $n$  pontos apresenta uma tendência em capturar genes contíguos.

Além disso, quando  $n$  é ímpar, ele tende a separar os genes dos extremos do cromossomo.

Isso é conhecido como **viés posicional** (*positional bias*).

O cruzamento uniforme, por outro lado, tem uma tendência a transmitir cerca de 50% de cada cromossomo para os filhos.

Isso é conhecido como **viés distributivo** (*distributional bias*).

A escolha do melhor cruzamento para seu problema depende das características de sua representação.

# Mutação

---

## Mutação Bit Flip

A mutação de troca de bit recebe uma probabilidade de mutação  $p_m$  e sorteia um valor aleatório para cada posição para decidir inverter ou não o bit:

indivíduo: 10001

$$p_m = 0.1$$

*sorteios* = [0.4, 0.01, 0.7, 0.3, 0.9]

mutado: 11001

## Mutação Bit Flip

```
bitFlip pm genes = do
  forEach gene in genes do
    flip? <- random(0, 1)
    if flip? <= pm
      then (1-gene)
      else gene
```



A probabilidade de mutação  $p_m$  deve ser ajustada de acordo com seu problema.

Geralmente utilizamos um valor de tal forma que seja esperada a mudança de um único bit por cromossomo.

# Modelos de GA

---

Os GAs possuem dois modelos populares na literatura: **generacional** (*generational*) e **estacionários** (*steady state*) que mudam a dinâmica populacional.

No modelo generacional nós temos uma população de tamanho  $\mu$ , escolhemos  $\mu$  pares de pais e geramos  $\lambda = \mu$  filhos que substituem os pais.

No modelo estacionário, a população atual é modificada em partes a cada geração:

Temos uma população de tamanho  $\mu$  em que  $\lambda < \mu$  indivíduos são substituídos por novas soluções da população filha.

Um caso comum é o uso de  $\lambda = 1$ .

# Substituição

---

A **substituição** ou **seleção dos sobreviventes** escolhe quais indivíduos serão escolhidos para compor a geração seguinte.

Esse procedimento altera a dinâmica da evolução pois pode favorecer a diversidade ou a convergência.

# Substituição Geracional

Na substituição geracional simplesmente substituímos a população atual pela população filha.



Utilizamos os métodos descritos na seleção dos pais para escolher os  $\lambda$  indivíduos substituídos pelos filhos gerados.

## Substitui os piores

Substitui os  $\lambda$  piores indivíduos da população.

Esse mecanismo pode incentivar a convergência prematura, deve ser utilizado junto com uma política de “não-duplicação” e/ou com um  $\mu \gg \lambda$ .

Utilizado em conjunto com outros esquemas de tal forma a preservar o melhor indivíduo da população.

# Schema Theory

---

Diversos estudos teóricos surgiram para entender a razão pela qual os GAs funcionam.

Uma delas é a **Teoria dos Esquemas** que define *esquemas* como um cromossomo binário que, em cada bit, pode ter o valor “#” representando um “não importa”.

Um esquema define portanto um hiperplano de possíveis valores:

10010

10#10

1#01#

##01#

Podemos calcular o fitness de um esquema como o fitness médio de todas as strings representáveis por ele.

(na prática é uma média amostral caso a quantidade de strings seja muito grande)

A ideia é que o processo de otimização é, na verdade, a busca por uma string binária sem caracteres do tipo “não importa” e que possuem o fitness mais alto.



Dessa forma podemos analisar a dinâmica da evolução pela agregação de múltiplas strings ao invés de cada uma individualmente.

Uma string de comprimento  $l$  possui  $2^l$  esquemas.

Se todos os seus bits forem “#”, ela representa  $2^l$  valores distintos.

Em uma população de tamanho  $\mu$  não teremos mais do que  $\mu \cdot 2^l$  esquemas diferentes.

Holland verificou que uma população processa algo na ordem de  $O(\mu^3)$  esquemas em paralelo, isso é conhecido como **paralelismo implícito**.

A **ordem** de um esquema é a quantidade de bits diferentes de “#”.

O **comprimento** é a distância entre os valores definidos mais externos.

O esquema  $H = 1##0#1#0$  tem ordem  $o(H) = 4$  e comprimento  $d(H) = 8 - 1 = 7$ .

Vamos definir  $P_d(H, x)$  como a probabilidade que o operador  $x$  irá destruir o esquema  $H$ .

Analogamente,  $P_s(H)$  é a probabilidade que o esquema  $H$  esteja contido no indivíduo escolhido.

Utilizando o GA com codificação binária, seleção por roleta, cruzamento de 1 ponto, mutação de troca de bits e sobrevivência generacional, Holland estudou a dinâmica de sobrevivência de esquemas.

Um esquema pode ser destruído por um crossover com probabilidade

$$P_d(H, 1X) = \frac{d(H)}{l-1}$$



Já com a mutação temos:

$$P_d(H, mut) = o(H) \cdot p_m$$

A probabilidade de selecionar um esquema é:

$$P_s(H) = \frac{n(H,t) \cdot f(H)}{\mu \cdot \bar{f}}$$

$n(H, t)$  representa quantos indivíduos contém o esquema  $H$  na geração  $t$ .

Sorteamos  $\mu$  pares de pais para gerar filhos, então temos uma seleção de

$$n'(H, t) = \frac{n(H, t) \cdot f(H)}{\bar{f}}$$

Dividindo esses valores por  $\mu$  para ter a proporção do esquema  $H$  na população ( $m(H)$ ) a proporção do esquema  $H$  entre uma geração e outra obedece a seguinte relação:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \cdot \frac{f(H)}{\bar{f}} \cdot \left[ 1 - \left( p_c \cdot \frac{d(H)}{l-1} \right) \right] \cdot [1 - p_m \cdot o(H)]$$

Para que um esquema  $H$  aumente sua presença na população temos que:

$$\frac{f(H)}{\bar{f}} \cdot \left[ 1 - \left( p_c \cdot \frac{d(H)}{l-1} \right) \right] \cdot [1 - p_m \cdot o(H)] > 1$$

As probabilidades combinadas sempre serão menores do que 1.

Se o fitness do esquema for menor que a média, a proporção de seleção será menor que 1.

Se o fitness for igual a média, a proporção será igual a 1.

Se o fitness for maior que a média, a proporção será maior que 1.

Das derivações da teoria dos esquemas, podemos perceber que esquemas com  $d(H)$  e  $o(H)$  pequenos, tem uma chance maior de serem preservados.

Isso levou a hipótese dos **blocos construtores** que diz que um GA começa construindo e selecionando esquemas de baixa ordem que são progressivamente combinados na criação de esquemas de alta ordem.



- A ideia que a seleção proporcional ao fitness não é amostral.
- A vantagem seletiva de um esquema tende a reduzir de uma geração a outra.
- Embora é possível prever a presença de um esquema na próxima geração, não podemos prever após  $n$  gerações.
- Essa teoria ignora os efeitos construtivos dos operadores.